Apellidos y Nombre:____

Hoja 1

1 Hallar dos números complejos tales que su suma sea 1+6i y su cociente imaginario puro. Suponer, además que la parte real del que se tome como divisor al calcular el cociente es –1.

2 Hallar los números complejos z tales que

$$z^2 + 2\bar{z}^2 + z - \bar{z} + 9 = 0$$

Sea $z = a + bi$ debemos encontrar a y b de forma que:

$$(a+bi)^2 + 2(a-bi)^2 + (a+bi) - (a-bi) + 9 = 0 \iff$$

$$\iff a^2 - b^2 + 2abi + 2a^2 - 2b^2 - 4abi + 2bi + 9 = 0 \iff$$

$$(3a^2 - 3b^2 + 9) + i(-2ab + 2b) = 0 \iff \begin{cases} 3a^2 - 3b^2 + 9 = 0 \\ -2ab + 2b = 0 \end{cases}$$

Se distinguen dos casos:

Caso 1: $b = 0$, entonces por la primera ecuación $a^2 = -3$, esto es absurdo pues a y b son números reales.

Caso 2: $b \neq 0$, entonces $a = +1$, y sustituyendo en la primera ecuación

$$-3b^2 - 12 \Rightarrow b = \pm 2$$

Luego los números complejos son:

$$z_1 = +1 + 2i \quad z_2 = +1 - 2i$$

Apellidos y Nombre:____

3 Comprueba que si un polinomio tiene coeficientes reales y z es una raíz compleja también tiene que ser raíz del polinomio la conjugada de z.

4 Calcular en forma binómica el número complejo $z = x + iy$ tal que $z^2 = 8 + 6i$.

Se trata de calcular x, y tal que $(x + iy)^2 = 8 + 6i$. Igualando las partes reales y las partes imaginarias de los números complejos del primer y segundo miembro:

5 Demostrar que si el producto de los números complejos $z = a + id$ y $w = b + ic$ es un número real, las rectas $ax + by + h = 0$, $cx + dy + k = 0$ son ortogonales entre sí.

Apellidos y Nombre:____

Apellidos y Nombre:____

Hoja 2

1 Representa la región del plano determinada por los afijos de los números complejos que verifican:

(a) $|z-3i|=4$

Sea $z=x+iy$, $z-3i=x+i(y-3)$ entonces

$$|z-3i|=4 \iff x^2+(y-3)^2=16$$

Se trata de la circunferencia de centro (0,3) = 3i y radio 4.

(b) $|z-2i|\le 1$

Sea $z=a+bi$ entonces $z-2i=a+(b-2)i$, se cumplirá

$$|z-2i|\le 1 \iff \sqrt{a^2+(b-2)^2}\le 1 \iff a^2+(b-2)^2\le 1$$

El conjunto buscado es el interior del circulo de centro (0,2) y radio 1.

(c) $|z-2|>|z-3|$

Sea $z=x+iy$ entonces $z-2=(x-2)+iy$ y $z-3=(x-3)+iy$, sus módulos

$$|z-2|=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \qquad |z-3|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

y por tanto,

$$|z-2|>|z-3| \iff (x-2)^2+y^2>(x-3)^2+y^2 \iff$$

$$\iff x^2+4-4x+y^2>x^2+9-6x+y^2 \iff 2x>5 \iff x>5/2$$

La solución es el conjunto

$$R=\{x+iy/x>5/2,\ x,y\in\Re\}$$

(d) $|z-1|+|z+3|=10$

La definición de una elipse es el conjunto de puntos cuya distancia a dos puntos fijos llamados fijos es constante. En este caso se trata de la elipse de focos los puntos 1 y –3 y semieje mayor 5. Veámoslo analíticamente.

Sea $z=x+iy$, entonces $z-1=(x-1)+iy$, $z+3=(x+3)+iy$, luego

$$|z-1|+|z+3|=10 \iff \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$$

Pasando una de las raíces al segundo miembro y elevando al cuadrado

$$(x-1)^2+y^2=\left[10-\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right]^2$$

Apellidos y Nombre:____

$$x^2+1-2x+y^2=100+(x+3)^2+y^2-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$-8x-108=-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$2x+27=5\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado,

$$4x^2+27^2+108x=25(x+3)^2+y^2=25(x^2+9+6x+y^2)$$

$$21x^2+42x+25y^2=504$$

Completando cuadrados

$$21(x^2+2x)+25y^2=504$$

$$21\left((x+1)^2-1\right)+25y^2=504$$

$$21(x+1)^2+25y^2=525$$

Se trata de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{525/21}+\frac{y^2}{525/25}=1 \iff \frac{(x+1)^2}{5^2}+\frac{y^2}{21}=1$$

2 Probar que si $|z|=2$, entonces $\left|\dfrac{1}{z^4-4z^2+3}\right|\le\dfrac{1}{3}$

$$z^4-4z^2+3 \underset{\substack{calculando\\ las\ raíces}}{=} \left(z^2-3\right)\left(z^2-1\right)$$

Tomando módulos y aplicando la desigualdad triangular inversa a cada factor se tiene que:

$$\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right|=\frac{1}{\left|z^2-3\right|}\frac{1}{\left|z^2-1\right|}\le\frac{1}{\left||z|^2-3\right|}\frac{1}{\left||z|^2-1\right|}$$

Si consideramos que esta acotación la realizamos para los números complejos de la circunferencia centrada en el origen y radio 2 se tendrá:

$$\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right|\le\frac{1}{\left||z|^2-3\right|}\frac{1}{\left||z|^2-1\right|}=\frac{1}{|4-3|}\frac{1}{|4-1|}=\frac{1}{3}$$

3 Demuestra las siguientes propiedades del módulo:

(a) La parte real o la parte imaginaria en valor absoluto de un número complejo es menor o igual que el módulo del número complejo.

Apellidos y Nombre:____

Ver teoría

(b) El módulo de un producto de números complejos es igual al producto de los módulos de los factores

Ver teoría

(c) El módulo del conjugado de un número complejo y el módulo del propio número complejo coinciden.

Ver teoría.

(d) $|z| = 1$ si y solamente si $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$

Se deduce de la definición

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{z\bar{z}} = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

6

Determina si el conjunto $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \left| \dfrac{z-3}{z+3} \right| < 2 \right\}$ está acotado. Representa el conjunto A.

Determinamos el conjunto de puntos de A,

$$z \in A \;\Leftrightarrow\; \frac{|z-3|}{|z+3|} < 2 \Leftrightarrow \frac{|z-3|^2}{|z+3|^2} < 2^2 \underset{\substack{Llamando\\ z=a+ib}}{\Leftrightarrow} \frac{(a-3)^2 + b^2}{(a+3)^2 + b^2} < 4$$

$$\Leftrightarrow\; (a-3)^2 + b^2 < 4\left[(a+3)^2 + b^2\right] \Leftrightarrow\; a^2 - 6a + 9 + b^2 < 4\left(a^2 + 6a + 9 + b^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 0 < 3a^2 + 30a + 3b^2 + 27 \Leftrightarrow\; 0 < a^2 + 10a + b^2 + 9 \underset{\substack{\text{completando}\\ \text{cuadrados}}}{\Leftrightarrow} 0 < (a+5)^2 - 25 + b^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow\; 16 < (a+5)^2 + b^2$$

El lugar geométrico es el exterior de la circunferencia de centro $(-5,0)$ y radio 4 . Por lo tanto A es no acotado.

Se recuerda que en el conjunto de los números complejos se dice que un conjunto A es acotado si

$$existe\;\; M > 0 \;\; tal\;\; que\;\; |z| < M \quad para\;\; todo\;\; z \in A$$

Apellidos y Nombre:____

Apellidos y Nombre:____

Hoja 3

1 Escribir en forma binómica el complejo:

$$z = \left(\frac{1 + \cos x + isenx}{1 + \cos x - isenx} \right)^n$$

Método 1.-

Método 2.- Sea

$$z_1 = 1 + \cos x + isenx = 1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} =$$

$$= 1 + \frac{e^{2ix} + 1}{2e^{ix}} + \frac{e^{2ix} - 1}{2e^{ix}} = 1 + e^{ix}$$

$$\overline{z_1} = 1 + \cos x - isenx = 1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} =$$

$$= 1 + \frac{e^{2ix} + 1}{2e^{ix}} - \frac{e^{2ix} - 1}{2e^{ix}} = 1 + e^{-ix}$$

Por lo tanto,

$$z = \left(\frac{z_1}{\overline{z_1}} \right)^n = \left(\frac{1 + e^{ix}}{1 + e^{-ix}} \right)^n = \left(\frac{e^{ix}\left(1 + e^{-ix}\right)}{\left(e^{ix} + 1\right)} \right)^n = e^{inx}$$

Método 3.- Sea

$$z_1 = 1 + \cos x + isenx \qquad \overline{z_1} = 1 + \cos x - isenx$$

entonces

Apellidos y Nombre:____

$$z=\left(\frac{z_1}{\overline{z_1}}\right)^n=\frac{z_1^{\,n}}{\overline{z_1}^{\,n}}=\frac{z_1^{\,n}\,z_1^{\,n}}{\overline{z_1}^{\,n}\,z_1^{\,n}}$$

Si consideramos que en forma exponencial la expresión de z_1 es $re^{i\theta}$ se tiene

$$z=\frac{z_1^{\,n}\,z_1^{\,n}}{\overline{z_1}^{\,n}\,z_1^{\,n}}=\frac{z_1^{\,2n}}{r^{2n}}=\frac{[r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)]^{2n}}{r^{2n}}=\frac{r^{2n}(\cos 2n\theta+i\operatorname{sen}2n\theta)}{r^{2n}}$$

Simplificando,

$$z=\cos 2n\theta+i\operatorname{sen}2n\theta$$

Para obtener la expresión en función de x se considera que

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$$

donde se ha utilizado

$$1-\cos x=2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\qquad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$$

Por lo tanto,

$$z=\left(\frac{z_1}{\overline{z_1}}\right)^n=\cos 2n\theta+i\operatorname{sen}2n\theta=\cos nx+i\operatorname{sen}nx$$

2 Expresar en potencias de $sen(\theta)$, $\cos(\theta)$

(a) $\cos(4\theta)$ (b) $sen(4\theta)$

Por la fórmula de Moivre

$$[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta]^4=\cos(4\theta)+i\operatorname{sen}(4\theta)$$

Aplicando el binomio de Newton al primer miembro de la igualdad,

$$[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta]^4=\binom{4}{0}\cos^4\theta+\binom{4}{1}\cos^3\theta(i\operatorname{sen}\theta)+\binom{4}{2}\cos^2\theta(i\operatorname{sen}\theta)^2+$$

$$+\binom{4}{3}\cos\theta(i\operatorname{sen}\theta)^3+\binom{4}{4}(i\operatorname{sen}\theta)^4=$$

$$=\cos^4\theta+4i\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta-6\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta-4i\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta+\operatorname{sen}^4\theta=$$

$$=\left(\cos^4\theta-6\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right)+i\left(4\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta-4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta\right)$$

Igualando parte real e imaginaria con el segundo miembro de la igualdad obtenida con la fórmula de Moivre

$$\cos(4\theta)=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^4\theta$$

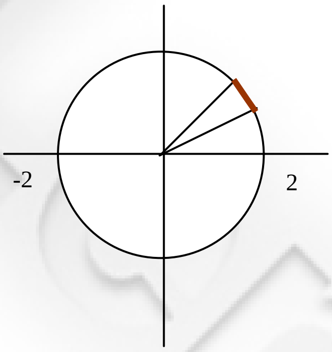
Apellidos y Nombre:____

$$\operatorname{sen}(4\theta) = 4\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta$$

3 Representa en el plano el conjunto de números complejos que verifican:

$$|z| = 2,\ \frac{\pi}{6} \le \arg(z) \le \frac{\pi}{4}$$

Es el conjunto de puntos de la circunferencia centrada en el origen y radio 2 cuyo argumento está comprendido entre $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$



Apellidos y Nombre:____

Hoja 4

1 Halla el número complejo cuyas raíces cúbicas tienen módulo 1 y están situadas en los vértices de un triángulo:

a) que tiene un vértice sobre la parte positiva del eje real.

b) que tiene un vértice sobre la parte negativa del eje imaginario.

c) que no tiene ningún vértice sobre los ejes.

2 De un pentágono regular centrado en el origen conocemos un vértice que es el punto $(1,-\sqrt{3})$. Calcula los restantes vértices.

Apellidos y Nombre:____

3 Resolver las ecuaciones

a) $z^3 - 1 = 0$

Apellidos y Nombre:____

b) $z^2 + 4iz - 3 = 0$

Apellidos y Nombre:____

Hoja 5

1 Encuentra todas las soluciones en el plano complejo de la ecuación $senz+\cos z=i\sqrt{2}$

Se trata de resolver la ecuación

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=i\sqrt{2}$$

Llamando $w=e^{iz}$,

$$\frac{w-w^{-1}}{2i}+\frac{w+w^{-1}}{2}=i\sqrt{2}$$

$$\frac{w^2-1}{2iw}+\frac{w^2+1}{2w}=i\sqrt{2}$$

$$\left(w^2-1\right)+i\left(w^2+1\right)=-2\sqrt{2}w$$

$$(1+i)w^2+2\sqrt{2}w+(-1+i)=0$$

$$w=\frac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-4(1+i)(-1+i)}}{2(1+i)}=\frac{-\sqrt{2}\pm 2}{(1+i)}=\frac{\left(-\sqrt{2}\pm 2\right)}{2}(1-i)=\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)e^{-i\pi/4}\\ \left(\sqrt{2}+1\right)e^{3i\pi/4}\end{cases}$$

Deshaciendo el cambio,

$$e^{iz}=w=\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)e^{-i\pi/4}\\ \left(\sqrt{2}+1\right)e^{3i\pi/4}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad z=\begin{cases}\frac{1}{i}\log\left[\left(\sqrt{2}-1\right)e^{-i\pi/4}\right]\\ \frac{1}{i}\log\left[\left(\sqrt{2}+1\right)e^{3i\pi/4}\right]\end{cases}$$

$$z=\begin{cases}\frac{1}{i}\left[\log\left(\sqrt{2}-1\right)+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]\\ \frac{1}{i}\left[\log\left(\sqrt{2}+1\right)+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right]\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$z=\begin{cases}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)-i\log\left(\sqrt{2}-1\right)\\ \left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)-i\log\left(\sqrt{2}+1\right)\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

2 Resuelve la ecuación $Sh\,(iz)=-i$

Apellidos y Nombre:____

Método 1: Por definición,

$$Sh\,(iz)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=-i$$

es decir,

$$e^{2iz}-1=-2ie^{iz}$$

Llamando $w=e^{iz}$, hay que resolver $w^2+2iw-1=(w+i)^2=0$ que tiene una raíz doble. Resolviendo ahora la ecuación

$$e^{iz}=-i \;\Leftrightarrow\; iz=log(-i) \;\Leftrightarrow\; z=\frac{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}{i}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Método 2: Teniendo en cuenta que $Sh\,(iz)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=isen(z)$ se trata de resolver la ecuación

$$Sh\,(iz)=-i \Leftrightarrow isen(z)=-i \Leftrightarrow sen(z)=-1$$

Los números complejos cuyo seno es uno son de la forma

3 Ordena de mayor a menor los módulos de los siguientes números complejos (donde sea necesario considera la determinación principal):

$$z_1=\frac{2-i}{4+2i} \qquad z_2=Ch(2-i\pi) \qquad z_3=(1+e)^{i/10}$$

$z_1=\frac{2-i}{4+2i}$ Como el modulo del cociente de dos números complejos es el cociente de los módulos:

$$|z_1|=\frac{|2-i|}{|4+2i|}=\frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{16+4}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}=\frac{1}{2}$$

$z_2=C\text{h}(2-i\pi)$ Calculando la parte real y la parte imaginaria:

$$z_2=Ch(2-i\pi)=\frac{e^{2-i\pi}+e^{-2+i\pi}}{2}=\frac{e^2e^{-i\pi}+e^{-2}e^{i\pi}}{2}=-\frac{e^2+e^{-2}}{2}=-\frac{e^4+1}{2e^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad |z_2|=Cosh2=\frac{e^4+1}{2e^2}$$

Apellidos y Nombre:____

$z_3 = (1+e)^{i/10}$ Utilizando la determinación principal del logaritmo:

$$z_3 = (1+e)^{i/10} = e^{\frac{i}{10}\log(1+e)} \qquad \Rightarrow \qquad |z_3| = 1$$

Como

$$\frac{1}{2} < 1 < \frac{e^4+1}{e^2}$$

se cumple,

$$|z_1| < |z_3| < |z_2|$$